МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФИЛИАЛ КУБАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
В Г. СЛАВЯНСКЕ-НА-КУБАНИ

Кафедра математики, информатики, естественнонаучных
и общетехнических дисциплин

С. А. РАДЧЕНКО

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Раздел «Логарифмические неравенства»

**Методические материалы
к изучению раздела дисциплины и организации самостоятельной работы
студентов 5-го курса,
обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
(профили подготовки – Математика, Информатика)
очной формы обучения**

Славянск-на-Кубани
Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани
2018

ББК 20.1
И 328

Рекомендовано к печати кафедрой математики, информатики, естественнонаучных и общетехнических дисциплин филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани

Протокол № 13 от 29 мая 2018 г.

Рецензент:
кандидат педагогических наук, доцент
У. А. Чернышева

Радченко, С. А.

И 328 **Избранные вопросы элементарной математики. Раздел «Логарифмические неравенства»** : Методические материалы к изучению раздела дисциплины и организации самостоятельной работы студентов 5-го курса, обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (профили подготовки – Математика, Информатика) очной формы обучения / С. А. Радченко. – Славянск-на-Кубани : Филиал Кубанского гос. ун-та в г. Славянске-на-Кубани, 2018. – 29 с. 1 экз.

Методические материалы составлены в соответствии с ФГОС высшего образования, учебным планом и рабочей программой дисциплины. Содержат краткие теоретические сведения, методические рекомендации по решению типовых задач и рекомендации по организации самостоятельной работы.

Методические материалы адресованы студентам 5-го курса, обучающимся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки – Математика, Информатика) очной формы обучения.

Электронная версия издания размещена в электронной информационно-образовательной среде филиала и доступна обучающимся из любой точки доступа к информационно-коммуникационной сети «Интернет».

ББК 20.1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Область применения методических материалов

Методические материалы к изучению учебной дисциплины Избранные вопросы элементарной математики являются частью программы подготовки бакалавров соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО) по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утверждённого приказом Министерства образования и науки РФ от 9 февраля 2016 г. № 91, зарегистрирован в Министерстве юстиции Российской Федерации 02.03.2016 г. (регистрационный № 41305).

Место дисциплины в структуре программы подготовки бакалавров

Дисциплина «Избранные вопросы элементарной математики» относится к вариативной части профессионального цикла. Для освоения дисциплины «Избранные вопросы элементарной математики» используются знания, умения, навыки, способы деятельности и установки, полученные и сформированные в ходе изучения следующих дисциплин: «Математический анализ», «Алгебра», «Геометрия», «Элементарная математика».

Дисциплина «Избранные вопросы элементарной математики» изучается на 5 курсе, предшествует изучению дисциплин «Избранные вопросы теории и методики обучения математике» и является заключительным этапом подготовки к работе в школах любого типа. Освоение дисциплины «Избранные вопросы элементарной математики» является необходимой основой для написания выпускной квалификационной работы.

Цели и задачи дисциплины – требования к результатам освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Избранные вопросы элементарной математики» являются:

– формирование систематических знаний о методах элементарной математики, её месте и роли в системе математических наук;

– развитие абстрактного мышления, пространственных представлений, вычислительной, алгоритмической культур и общей математической культуры.

В соответствие с целями ставятся следующие задачи дисциплины:

– стимулирование формирования общекультурных и профессиональных компетенций бакалавра через развитие культуры мышления в аспекте применения на практике методов элементарной математики;

– расширение систематизированных знаний в области математики для обеспечения возможности использовать знание современных проблем науки и образования при решении образовательных и профессиональных задач;

– обеспечение условий для активизации и стимулирования познавательной деятельности студентов и формирование у них опыта использования методов элементарной математики в ходе решения практических задач в процессе освоения дисциплины.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине

Изучение данной учебной дисциплины направлено на формирование у студентов следующих компетенций:

ОК-6 способностью к самоорганизации и самообразованию;

ПК-1 готовностью реализовывать образовательные программы по учебным предметам в соответствии с требованиями образовательных стандартов;

ПК-4 способностью использовать возможности образовательной среды для достижения личностных, метапредметных и предметных результатов обучения и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами преподаваемых учебных предметов.

ТЕМА 1. ОБЩИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Логарифмическим неравенством называется неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма и/или в основании логарифма.

Логарифмические неравенства, как и показательные неравенства, в общем случае не решаются в виде формул (аналитически). Их можно решать только приближенно численными методами на компьютерах. А вот экзаменационные задачи специально составлены так, что их можно решить аналитически. Иными словами, Вы можете (и должны!) проделать такие тождественные преобразования, которые приводят заданное логарифмическое неравенство к самому простому логарифмическому неравенству. Это самое простое неравенство так и называется простейшим логарифмическим неравенством. А вот простейшее логарифмическое неравенство решается в самом общем виде.

Из этих общих рассуждений следуют вполне конкретные рекомендации. Для успешного решения логарифмических неравенств необходимо:

- Четко решать простейшее логарифмическое неравенство.
- Не только знать все логарифмические тождества, но и множества значений переменной, на которых эти тождества определены, чтобы при использовании этих тождеств не приобретать лишних решений, а тем более, - не терять решений неравенства.

Подробно и без ошибок проделывать математические преобразования неравенств. При этом сами выкладки должны делаться автоматически руками, а голова должна думать об общей путеводной нити решения.

Знать методы решения задач (то есть знать все пути прохода по лабиринту решения от заданного неравенства до простейшего логарифмического неравенства). Для правильного ориентирования на каждом этапе Вам придется (сознательно или интуитивно!): определить тип неравенства, вспомнить соответствующий этому типу метод решения задачи.

Методы решения логарифмических неравенств аналогичны методам решения логарифмических уравнений. Поэтому неплохо бы Вам сначала изучить методы решения логарифмических уравнений.

На рисунке представлена общая схема всех типов логарифмических неравенств (рис.1).

Рис. 1: Типы логарифмических неравенств

Как видно из этой схемы, стратегия решения логарифмических неравенств состоит в том, чтобы привести заданное логарифмическое неравенство к неравенству, прежде всего, с одинаковыми основаниями логарифмов, а лишь затем - с одинаковыми выражениями под логарифмами. Сделав в таком неравенстве замену переменной, Вы получаете простое алгебраическое неравенство (обычно, дробно-рациональное, квадратное или линейное) относительно этой новой переменной. Решив это неравенство (например, методом интервалов) и сделав обратную замену, Вы приходите к совокупности простейших логарифмических неравенств, которые решаются в общем виде с помощью потенцирования и использования монотонности логарифмической функции.

Особняком стоят неравенства, в которых встречаются только сумма и разность логарифмов и которые с помощью логарифмических тождеств прямо сворачиваются в один логарифм независимо от того, что под знаком логарифма изначально стоят самые разнообразные выражения с переменной.

Основным подводным камнем при решении логарифмических неравенств является эквивалентность используемых преобразований. Необходимо всегда помнить, что логарифм определен при выполнении трех условий:

- выражение под логарифмом больше нуля;
- основание логарифма больше нуля;
- основание логарифма не равно единице.

Когда же следует писать эти три «дополнительных условия»? Рецепт очень прост: как только Вы используете любое логарифмическое тождество, сразу же дополняйте его этими неравенствами.

Когда же надо решать неравенства, описывающие эти три «дополнительных» условия? Поскольку логарифмическое неравенство имеет решение, как правило, в виде интервалов, то проверить выполнимость этих трех условий для всех решений логарифмического неравенства нет никакой возможности (это Вам не уравнение!). Поэтому необходимо решать сразу всю систему неравенств.

ТЕМА 2 ПРОСТЕЙШИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Логарифмическим неравенством называется неравенство, содержащее переменную под знаком логарифма и/или в основании логарифма.

Простейшим логарифмическим неравенством называется неравенство вида: $\log_a f(x) > b$,

где a - известное число $(a > 0, a \neq 1)$.

Пример: $\log_5 x > 3$.

Теорема. Простейшее логарифмическое неравенство решается потенцированием с использованием монотонности логарифмической функции:

$$\log_a f(x) > b \iff f(x) > a^b \ (a > 0)$$

или

$$\log_a f(x) > b \iff 0 < f(x) < a^b \ (0 < a < 1).$$

Иными словами,

«Если основание логарифма больше единицы, то при потенцировании логарифмического неравенства знак неравенства сохраняется.

Если основание логарифма меньше единицы, но больше нуля, то при потенцировании логарифмического неравенства знак неравенства меняется на противоположный».

Доказательство.

Используем определение логарифма и потенцируем обе части уравнения по основанию a с учетом монотонного возрастания логарифмической функции с основанием логарифмов, большим единицы:

$$\log_a f(x) > b \iff$$

$$\iff \begin{cases} f(x) > a^b, \\ f(x) > 0, \\ a > 1 \end{cases} \iff \begin{cases} f(x) > a^b, \\ a > 1. \end{cases}$$

Условие $f(x) > 0$ необходимо добавлять, поскольку логарифмическая функция определена только для положительных значений аргумента.

Аналогично, при положительном основании логарифма, меньшем единицы, логарифмическая функция монотонно убывает:

$$\log_a f(x) > b \iff$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, \\ f(x) > 0, \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b, \\ 0 < a < 1. \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

Эта теорема наглядно иллюстрируется графиками логарифмической функции.

Рассмотрите внимательно рисунки (рис. 2, рис. 3).

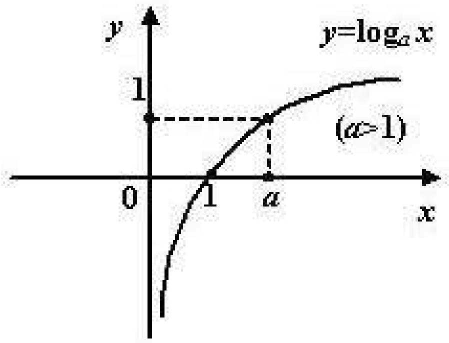

Рис. 2: График логарифмической функции с основанием логарифма больше единицы

$$\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$$

Если основание логарифма больше единицы, то при потенцировании знак неравенства не изменяется.

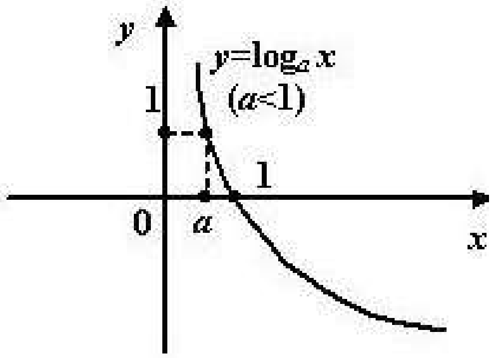

Рис. 3: График логарифмической функции с основанием логарифма меньше единицы, но больше нуля

$$\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$$

Если основание логарифма меньше единицы, но больше нуля, то при потенцировании знак неравенства изменяется
на противоположный.

Рассмотрим пример решения простейшего логарифмического неравенства.

Решить неравенство $\log_2 x > 3$.

Тип: простейшее логарифмическое неравенство.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\log_2 x > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2^3, \\ x > 0. \end{cases}$$

Поскольку $2 > 1$, $x \in (8; +\infty)$.

Рассмотрим еще один пример.

Решить неравенство $\log_{0,5} x > 3$.

Тип: простейшее логарифмическое неравенство.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\log_{0,5} x > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0{,}5^3, \\ x > 0. \end{cases}$$

Поскольку $0 < 0{,}5 < 1$, $x \in (0; 0{,}125)$.

Простейшим логарифмическим неравенством с одинаковыми основаниями логарифмов называется неравенство вида:

$$\log_a f(x) > \log_a F(x),$$

где a - известное число $(a > 0, a \neq 1)$.

Замечание. Строго говоря, неравенство вида $\log_a f(x) > \log_a F(x)$ не является простейшим логарифмическим неравенством. Однако его можно привести к простейшему логарифмическому неравенству:

$$\log_a f(x) > \log_a F(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) - \log_a F(x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a \dfrac{f(x)}{F(x)}, \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0, \\ a > 0; a \neq 1. \end{cases}$$

Чтобы не делать каждый раз этого простого преобразования мы в дальнейшем неравенство вида $\log_a f(x) > \log_a F(x)$ будем называть простейшим логарифмическим неравенством с одинаковыми основаниями логарифмов.

Пример: $\log_5 x > \log_5 (x^2 + 2)$.

Теорема. Простейшее логарифмическое неравенство с одинаковыми основаниями логарифмов решается потенцированием с использованием монотонности логарифмической функции:

$$\log_a f(x) > \log_a F(x) \Leftrightarrow f(x) > F(x) \quad (a > 1)$$

или

$$\log_a f(x) > \log_a F(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) < F(x) \quad (0 < a < 1).$$

Иными словами,

«Если основание логарифма больше единицы, то при потенцировании логарифмического неравенства знак неравенства сохраняется.

Если основание логарифма меньше единицы, но больше нуля, то при потенцировании логарифмического неравенства знак неравенства меняется на противоположный.»

Доказательство.

Используем монотонное возрастание логарифмической функции при основании логарифма, большем единицы, и монотонное убывание логарифмической функции при положительном основании логарифма, меньшем единицы:

$$\log_a f(x) > \log_a F(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ f(x) > F(x), \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < F(x), \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ f(x) > F(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ f(x) < F(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Такой метод решения во многих пособиях называется методом приведения к одному основанию. Для единообразия этот метод решения мы будем также называть логарифмированием (которым он, по сути, и является).

Рассмотрим пример решения простейшего логарифмического неравенства с одинаковыми основаниями логарифмов.

Решить неравенство $\log_2 x > \log_2 4$

Тип: простейшее логарифмическое неравенство с одинаковыми основаниями логарифмов.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\log_2 x > \log_2 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x > 0. \end{cases}$$

Поскольку $2 > 1$, $x \in (4; +\infty)$.

Рассмотрим еще один пример.

Решить неравенство $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 4$

Тип: простейшее логарифмическое неравенство с одинаковыми основаниями логарифмов.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\log_{0,5} x > \log_{0,5} 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x > 0. \end{cases}$$

Поскольку $0 < 0{,}5 < 1$, $x \in (0; 4)$.

Простейшим логарифмическим неравенством с переменным основанием логарифма называется неравенство вида:

$$\log_a f(x) > b,$$

где a - параметр или функция переменной x ($a > 0, a \neq 1$).

Пример: $\log_{x+2} x > 3$.

Решение простейших логарифмических неравенств с переменным основанием логарифма требует рассмотрения совокупности двух случаев:

1. основание больше единицы (в этом случае при потенцировании знак неравенства не изменяется);

2. основание меньше единицы, но больше нуля (в этом случае при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный).

Записываются эти случаи в виде совокупности систем.

Рассмотрим пример решения простейшего логарифмического неравенства с переменным основанием логарифма.

Решить неравенство $\log_a x > 126$.

Тип: простейшее логарифмическое неравенство с переменным основанием логарифма.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\log_a x > 126 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 0, \\ x > a^{126}, \\ x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1, \\ x < a^{126}, \\ x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > a^{126}, \\ a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < a^{126} \\ 0 < a < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (0; a^{126})$ при $a \in (0;1)$; $x \in (a^{126}; +\infty)$ при $a \in (1;+\infty)$.

Простейшим логарифмическим неравенством с одинаковыми переменными основаниями логарифмов называется неравенство вида:

$$\log_a f(x) > \log_a F(x),$$

где a - параметр или функция переменной x $(a > 0, a \neq 1)$.

Пример: $\log_x(x+2) > \log_x x^2$.

Замечание. Строго говоря, неравенство вида $\log_a f(x) > \log_a F(x)$, не является простейшим логарифмическим неравенством. Однако его можно привести к простейшему логарифмическому неравенству:

$$\log_a f(x) > \log_a F(x) \Leftrightarrow \log_a f(x) - \log_a F(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a \dfrac{f(x)}{F(x)}, \\ f(x) > 0, \\ F(x) > 0, \\ a > 0; a \neq 1. \end{cases}$$

Чтобы не делать каждый раз этого простого преобразования мы в дальнейшем неравенство вида $\log_a f(x) > \log_a F(x)$ будем называть простейшим логарифмическим неравенством с одинаковыми переменными основаниями логарифмов.

Решение простейших логарифмических неравенств с одинаковыми переменными основаниями логарифмов требует рассмотрения совокупности двух случаев:

1. основания больше единицы (в этом случае при потенцировании знак неравенства не изменяется);
2. основания меньше единицы, но больше нуля (в этом случае при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный).

Записываются эти случаи в виде совокупности систем.

Рассмотрим пример решения простейшего логарифмического неравенства с одинаковыми переменными основаниями логарифмов.

Решить неравенство $\log_x x > \log_x 4$.

Тип: простейшее логарифмическое неравенство с одинаковыми переменными основаниями логарифмов.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\log_x x > \log_x 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Ответ: $x \in (1; 4)$.

Задания для самостоятельного решения

1. $\log_2 x > 8$;
2. $\log_{\frac{1}{3}} x < -4$;
3. $\log_{0,6}(6x - x^2) > \log_{0,6}(-8 - x)$;
4. $\log_{\frac{1}{2}} 2(3 + x) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 8) > 0$;
5. $\lg(3x - 7) \leq \lg(x + 1)$;
6. $\log_{\sqrt{3}}(x^2 + 10x) \geq \log_{\sqrt{3}}(x - 14)$;
7. $\log_{\frac{1}{x}} \left(\frac{5}{2}x - 1\right) \geq -2$;
8. $\log_{2x - x^3} \left(x - \frac{3}{2}\right) > 0$;
9. $\log_x(x + 1) < \log_{\frac{1}{x}}(2 - x)$;
10. $\log_{\lg 9}(8 - x) > \log_{\lg 9}(x + 4)(2x - 3)^{-1}$.

ТЕМА 3 ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Если в основании логарифма находится переменная, то при потенцировании простейшего логарифмического неравенства необходимо рассматривать два случая:

- основание логарифма больше единицы (при потенцировании знак неравенства не изменяется);
- основание логарифма меньше единицы (при потенцировании знак неравенства меняется на противоположный).

Разберем решение на примере.

Решить неравенство $\log_{x+3} 16 > 2$.

Тип: простейшее логарифмическое неравенство с переменным основанием логарифмов.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\log_{x+3} 16 > 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x + 3 < 1, \\ 16 < (x + 3)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 3 > 1, \\ 16 > (x + 3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ 16 < x^2 + 6x + 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ 16 > x^2 + 6x + 9 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ x^2 + 6x - 7 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ x^2 + 6x - 7 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Замечание. При основании логарифмов меньше единицы и больше нуля логарифмическая функция монотонно убывает, поэтому при потенцировании простейшего логарифмического неравенства знак неравенства изменяется на противоположный.

При основании логарифмов больше единицы логарифмическая функция монотонно возрастает, поэтому при потенцировании простейшего логарифмического неравенства знак неравенства не изменяется.

Поскольку в данном случае основание логарифмов является переменным, то мы должны рассмотреть совокупность этих двух случаев.

Тип: квадратное неравенство в первой системе.

Метод: графическое решение квадратного неравенства.

Корни квадратного трехчлена (рис.4):

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2} = \left[\begin{array}{l} -7 \\ 1 \end{array}\right. .$$

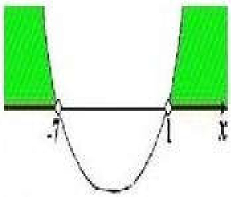

Рис. 4

$$x^2 + 6x - 7 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 7) \cup (1; +\infty)$$

Тип: первая система неравенств.

Метод: графическое решение системы неравенств.

Решение первой системы (рис.5):

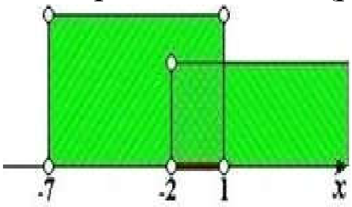

Рис. 5

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \in (-7; 1) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 1).$$

Замечание. Решением системы является пересечение решений отдельных условий системы. На графике этот факт изображается различной штриховкой отдельных областей для удобства выделения их пересечения. Решением внутренней совокупности является объединение отдельных условий совокупности. На графике этот факт изображается одинаковой штриховкой отдельных областей для удобства выделения их объединения.

Обратите внимание! Решение первой системы является пустым множеством.

Так как первая система не имеет решений, решением совокупности будет являться решение второй системы и обозначение совокупности можно отбросить.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3 < x < -2, \\ x^2 + 6x - 7 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ x^2 + 6x - 7 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \emptyset \\ \begin{cases} x > -2, \\ x^2 + 6x - 7 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Тип: квадратное неравенство в первой системе.

Метод: графическое решение квадратного неравенства.

Корни квадратного трехчлена (рис. 6):

$$x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2} = \left[\begin{array}{l} -7 \\ 1 \end{array}\right..$$

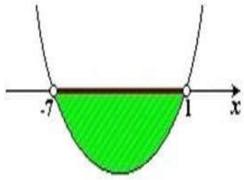

Рис. 6

$$x^2 + 6x - 7 < 0 \Leftrightarrow x \in (-7; 1)$$

Тип: вторая система неравенств.

Метод: графическое решение системы неравенств.

Решение второй системы (рис. 7):

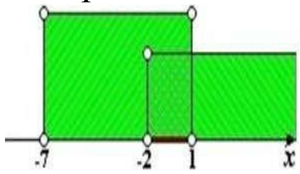

Рис. 7

$$\begin{cases} x > 2, \\ x \in (-7; 1) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 1).$$

Ответ: $x \in (-7; 1)$

Замечание. Решением системы является пересечение решений отдельных условий системы. На графике этот факт изображается различной штриховкой отдельных областей для удобства выделения их пересечения.

Задания для самостоятельного решения

1. $\log_{3x+4} 0{,}2 > 0$;
2. $\log_{3-2x} \frac{1}{3} \geq 1$;
3. $\log_{x^2}(x^2 + x - 1) < 0$;
4. $\log_{3x+2} x < 1$;
5. $\log_x \left(2x - \frac{3}{4}\right) < 2$;
6. $\log_{|x-1|} 2^{-1} > 2^{-1}$;
7. $\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x \sqrt{3 - x}\right) \geq 0$;

8. $\log_{4x}(x^2 - x - 2) > \log_{4x}(3 + 2x - x^2)$;

9. $\log_{x^2} \frac{4x-5}{|2-x|} \geq \log_{x^2} x$;

10. $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2 + x - 1) \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x - 6 - 3x^2)$.

ТЕМА 4 . ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВАХ

Если в неравенстве встречаются лишь степени логарифмов с одинаковыми основаниями и одинаковыми выражениями под логарифмами, то:

- сделайте замену переменной;

- решите полученное неравенство относительно этой новой переменной;

- сделайте обратную подстановку и получите совокупность простейших логарифмических неравенств;

- с помощью потенцирования и свойства монотонности логарифмической функции решите простейшее логарифмическое неравенство и получите ответ.

Разберем решение на примере.

Решить неравенство $\log_2^2 x + 3 < 4\log_2 x$.

Тип: одинаковые основания логарифмов - одинаковые выражения под логарифмами.

Метод: замена переменной.

Делаем замену переменой:

$$y = \log_2 x.$$

$$\begin{cases} \log_2^2 x + 3 < 4\log_2 x\,, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_2 x\,, \\ y^2 + 3 < 4y, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_2 x\,, \\ y^2 - 4y + 3 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Тип: квадратное неравенство (второе неравенство системы).

Метод: графическое решение квадратного неравенства.

Корни квадратного трехчлена (рис. 8):

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = \left[\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right.$$

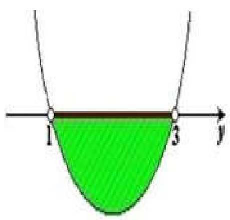

Рис. 8

$$y^2 - 4y + 3 < 0 \Leftrightarrow y \in (1; 3)$$

Решив квадратное неравенство относительно новой переменной, делаем обратную замену:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_2 x, \\ y^2 - 4y + 3 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 3, \\ \log_2 x > 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Тип: простейшие логарифмические неравенства.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_2 x, \\ y^2 - 4y + 3 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2^3, \\ x > 2^1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 8.$$

Ответ: $x \in (2; 8)$.

Задания для самостоятельного решения

1. $\lg x - 0{,}5(\lg x^2) < 0$;
2. $\lg^2 x \geq \lg x + 2$;
3. $\log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$;
4. $2\log^2_{0,3} x - 7\log_{0,3} x - 4 \leq 0$;
5. $\log^2_{0,9} x + 6 \geq 5\log_{0,9} x$;
6. $\log^2_4 x + \log_4 \sqrt{x} - 1{,}5 > 0$;
7. $\log^2_2(x+1) - 3\log_2(x+1) \geq -2$;
8. $\log^2_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2$;
9. $\log^2_2(2-x) - 4\log_2(2-x) \geq 5$;
10. $3\log^2_2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) \geq 2$.

ТЕМА 5 ПРИВЕДЕНИЕ К ОДИНАКОВЫМ ВЫРАЖЕНИЯМ ПОД ЗНАКАМИ ЛОГАРИФМОВ

Если в неравенстве встречаются степени логарифмов с одинаковыми основаниями, но разными выражениями под логарифмами, то:

- используя логарифмические тождества, приведите к одинаковым выражениям под логарифмами и получите логарифмическое неравенство с одинаковыми основаниями логарифмов и одинаковыми выражениями под логарифмами;

- сделайте замену переменной;

- решите полученное неравенство относительно этой новой переменной;

- сделайте обратную подстановку и получите совокупность простейших логарифмических неравенств;

- с помощью потенцирования и свойства монотонности логарифмической функции решите простейшее логарифмическое неравенство и получите ответ.

Разберем решение на примере.

Решить неравенство $\log^2_2 x + 3 < 2\log_2 x^2$.

Тип: одинаковые основания логарифмов - разные выражения под логарифмами.

Метод: приведите к одинаковым выражениям под логарифмами.

Используя тождество логарифма степени:

$$\log_2 x^2 = 2\log_2 x \ \ (x > 0).$$

Замечание (об эквивалентности преобразования).

Строго говоря, тождество должно иметь вид: \$\log_2 x^2 = 2\log_2 |x|$ при $x \neq 0$.

Но в данном примере первый член содержит $\log_2 x$ и поэтому область определения исходного уравнения задается условием $x > 0 \Rightarrow |x| = x$.

В таком случае мы можем использовать тождество с более узкой областью существования:

$\log_2 x^2 = 2\log_2 x$ при $x > 0$.

А само уравнение с помощью этого тождества преобразуется как

$$\log_2 x^2 = 2\log_2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x + 3 < 2 \cdot 2\log_2 x, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x + 3 < 4\log_2 x, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Тип: одинаковые основания логарифмов - одинаковые выражения под логарифмами.

Метод: замена переменной.

Делаем замену переменой:

$$y = \log_2 x.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2^2 x + 3 < 4\log_2 x, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_2 x, \\ y^2 + 3 < 4y, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_2 x, \\ y^2 - 4y + 3 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Тип: квадратное неравенство (второе неравенство системы).

Метод: графическое решение квадратного неравенства.

Корни квадратного трехчлена (рис. 9):

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = \left[\begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right.$$

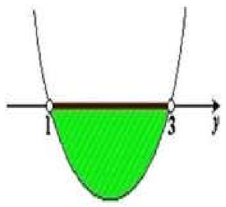

Рис. 9

$$y^2 - 4y + 3 < 0 \Leftrightarrow y \in (1; 3)$$

Решив квадратное неравенство относительно новой переменной, делаем обратную замену:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \log_2 x, \\ y^2 - 4y + 3 < 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 3, \\ \log_2 x > 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Тип: простейшие логарифмические неравенства.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x < 3, \\ \log_2 x > 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2^3, \\ x > 2^1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 8.$$

Ответ: $x \in (2; 8)$.

Задания для самостоятельного решения

1. $3 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > 0$;
2. $\log_{\frac{1}{3}}^2 x^2 - 7\log_{\frac{1}{3}} x + 3 \le 0$;
3. $\log_3^2 x^2 + 13\log_3 x + 11 < 0$;
4. $\log_2^2 x - 5\log_2 x^2 \le -25$;
5. $\log_{\frac{1}{5}}^2 x^2 - 31\log_{\frac{1}{5}} x + 15 < 0$;
6. $\log_2^2 x^2 - 15\log_2 x - 8 \le 0$;
7. $\log_3^2 x \ge 4 - \log_3 x^3$;
8. $\lg^2(x-1)^3 - 10\lg(x-1) + 3 > 0$;
9. $\log_{0,5}^2 x^2 + 6 \ge \frac{5}{2}\log_{0,5} x^2$;
10. $\log_4^2 x + \log_4 x^4 + \log_4 4^3 > 2^3$.

ТЕМА 6 ПРИВЕДЕНИЕ К ОДИНАКОВЫМ ОСНОВАНИЯМ ЛОГАРИФМОВ

Если в неравенстве встречаются логарифмы с разными основаниями логарифмов, то:

- используя тождества перехода к новому основанию логарифма, приведите все логарифмы к одинаковым основаниям, то есть получите логарифмическое неравенство с одинаковыми основаниями логарифмов и разными выражениями под логарифмами;

- приведите к одинаковым выражениям под логарифмами и получите логарифмическое неравенство
с одинаковыми основаниями логарифмов и одинаковыми выражениями под логарифмами;

- сделайте замену переменной;

- решите полученное неравенство относительно этой новой переменной;

- сделайте обратную подстановку и получите совокупность простейших логарифмических неравенств;

- с помощью потенцирования и свойства монотонности логарифмической функции решите простейшее логарифмическое неравенство и получите ответ.

Разберем решение на примере.

Решить неравенство $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6$.

Тип: разные основания логарифмов.

Метод: приведите к одинаковым основаниям логарифмов.

$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x < 6 \Leftrightarrow \log_3 x + \log_{3^{\frac{1}{2}}} x + \log_{3^{-1}} x < 6 \Leftrightarrow$$

Используем обобщенное тождество логарифма степени:

$$\log_{3^{\frac{1}{2}}} x = \frac{1}{1/2}\log_3 x \quad (x > 0),$$

$$\log_{3^{-1}} x = \frac{1}{-1}\log_3 x \quad (x > 0).$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x + \log_{3^{\frac{1}{2}}} x + \log_{3^{-1}} x < 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x + \dfrac{1}{1/2}\log_3 x + \dfrac{1}{-1}\log_3 x < 6, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Используем слева обобщенное тождество логарифма степени - и сразу же добавляем условие, при котором это тождество определено!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x + 2\log_3 x - \log_3 x < 6, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_3 x < 6, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 3, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Тип: простейшее логарифмическое неравенство.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x < 3, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3^3, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 27.$$

Замечание. При основании логарифмов больше единицы логарифмическая функция монотонно возрастает, поэтому при потенцировании простейшего логарифмического неравенства знак неравенства не изменяется.

Ответ: $x \in (0; 27)$.

Задания для самостоятельного решения

1. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 2\log_2(x+1) < 2$;
2. $\frac{3}{2}\log_4 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2}\log_2 x > 1$;
3. $6\log_8(x-2) + 3\log_{\frac{1}{8}}(x-3) - 2 > 0$;
4. $\log_{\pi}(x+27) + \log_{\frac{1}{\pi}}(16-2x) < \log_{\pi} x$;
5. $\log_{1,5}\frac{2x-8}{x-2} < \log_5 1$;
6. $\log_{0,3}(3x-8) > -\log_{\frac{10}{3}}(4+x^2)$;
7. $\frac{1}{2} + \log_9 5x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$;
8. $\log_3\big((x+2)(x+4)\big) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7$;
9. $2^{-1} + \log_9 x - \log_3(5x) > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$;
10. $\log_{x+2}(7x^2 - x^3) + \log_{(x+2)^{-1}}(x^2 - 3x) \geq \log_{\sqrt{x+2}}\sqrt{5-x}$.

ТЕМА 7 ПОКАЗАТЕЛЬНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

При составлении неравенств экзаменаторы часто осуществляют комбинацию различных типов неравенств. Это делается с помощью суперпозиции функций. Так называется сложная функция, то есть функция, аргументом которой является другая функция («функция от функции»). Например, если обе части логарифмического неравенства использовать в качестве показателя показательной функции, то получим показательно-логарифмическое неравенство.

Решение показательно-логарифмического неравенства осуществляется в обратном порядке:

- решите внешнее (показательное) неравенство и в результате получите логарифмическое неравенство;
- решите логарифмическое неравенство и получите ответ.

Разберем решение на примере.

Решить неравенство $0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_3\frac{3x+6}{x^2+2}} > 1.$

Приводим к одинаковым основаниям степеней 0,3.

$$1 = 0{,}3^0.$$

Используем определение нулевой степени числа:

$$0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_3\frac{3x+6}{x^2+2}} > 1 \Leftrightarrow 0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_3\frac{3x+6}{x^2+2}} > 0{,}3^0 \Leftrightarrow$$

Тип: простейшее показательное неравенство с одинаковыми основаниями степеней.

Метод: логарифмирование и использование монотонности показательной функции.

$$\Leftrightarrow 0{,}3^{\log_{\frac{1}{3}}\log_3\frac{3x+6}{x^2+2}} > 0{,}3^0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\log_3\frac{3x+6}{x^2+2} < 0 \Leftrightarrow$$

Замечание. При основании степени меньше единицы и больше нуля показательная функция монотонно убывает, поэтому при логарифмировании простейшего показательного неравенства знак неравенства изменяется на противоположный.

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\log_3\frac{3x+6}{x^2+2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\dfrac{3x+6}{x^2+2} > (\dfrac{1}{3})^0 \\ \log_3\dfrac{3x+6}{x^2+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\dfrac{3x+6}{x^2+2} > 1 \\ \log_3\dfrac{3x+6}{x^2+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_3\frac{3x+6}{x^2+2} > 1 \Leftrightarrow$$

Второе неравенство является следствием первого и может быть «отброшено»!

Тип: простейшее логарифмическое неравенство.

Метод: логарифмирование и использование монотонности показательной функции.

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{3x+6}{x^2+2} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+6}{x^2+2} > 3^1, \\ \dfrac{3x+6}{x^2+2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3x+6}{x^2+2} > 3 \Leftrightarrow$$

Замечание. При основании логарифмов больше единицы логарифмическая функция монотонно возрастает, поэтому при потенцировании простейшего логарифмического неравенства знак неравенства не изменяется.

$$\Leftrightarrow \frac{3x+6-3x^2-6}{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-3x^2+3x}{x^2+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x>0}{x^2+2}$$

Знаменатель $x^2+2>0$ всегда больше нуля и на него можно смело домножить обе части неравенства. При этом знак неравенства остается неизменным.

Тип: квадратное неравенство.

Метод: графическое решение квадратного неравенства.

Корни квадратного трехчлена (рис. 10):

$$x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x+1) \Leftrightarrow x = \left[\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right..$$

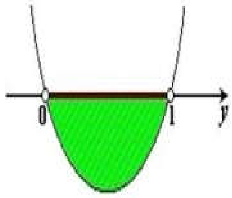

Рис. 10

$$x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x \in (0;1).$$

Ответ: $x \in (0;1)$.

Задания для самостоятельного решения

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$;
2. $4^{\log_5\left(\frac{x-1}{x+3}\right)} < \frac{1}{16}$;
3. $x^{0,5\log_{0,5}x-3} \geq 2^{2,5\log_{0,5}x-3}$;
4. $0{,}4^{\log_2^2 x+1} < 6{,}25^{2-\log_2 x^3}$;
5. $x \cdot 3^{\log_{\frac{1}{9}}(16x^4-8x^2+1)} < \frac{1}{3}$;
6. $x^{2-\log_2^2 x-\log_2 x^2} > \frac{1}{x}$;
7. $\sqrt{x}^{2\log_2 x} + 16x^{\log_{0,5}x} - 17 < 0$;
8. $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} - 5^2 < 0$;
9. $0{,}09^{2^{-1}\cdot\log_{\frac{1}{3}}3\log_2\frac{x+2}{x^2+2}} > 1$;
10. $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}} > \log_{\sqrt{2}} 2$.

ТЕМА 8 ЛОГАРИФМО-ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

В этих неравенствах внешней является логарифмическая функция, а внутренней - показательная функция.

Для решения логарифмо-показательных неравенств:

- решите внешнее логарифмическое неравенство, в результате чего получите показательное неравенство;
- решите показательное неравенство и получите ответ.

Разберем решение на примере.

Решить неравенство $\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)<1+\lg(2^{x-2}+1)$.

Тип: сумма логарифмов.

Используем значение логарифма основания:

$$1=\lg 10.$$

$$\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)<1+\lg(2^{x-2}+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg 2+\lg(4^{x-2}+9)<\lg 10+\lg(2^{x-2}+1)\Leftrightarrow$$

Используем тождество суммы логарифмов:

$$\lg 2+\lg(4^{x-2}+9)=\lg\big(2\cdot(4^{x-2}+9)\big)\quad (4^{x-2}+9>0),$$

$$\lg 10+\lg(2^{x-2}+1)=\lg\big(10\cdot(2^{x-2}+1)\big)\quad (2^{x-2}+1>0).$$

$$\Leftrightarrow \lg 2+\lg(4^{x-2}+9)<\lg 10+\lg(2^{x-2}+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lg\big(2\cdot(4^{x-2}+9)\big)<\lg\big(10\cdot(2^{x-2}+1)\big),\\ 4^{x-2}+9>0;\ 2^{x-2}+1>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lg\big(2\cdot(4^{x-2}+9)\big)<\lg\big(10\cdot(2^{x-2}+1)\big)\Leftrightarrow$$

Замечание (анализ области определения тождеств). Используя тождество, мы обязаны сразу же записать область существования этого тождества. Однако в данном случае, в силу того, что показательная функция положительна при любом значении аргумента,
это дополнительное условие выполняется всегда и его можно «отбросить».

Тип: простейшее логарифмическое неравенство с одинаковыми основаниями логарифмов.

Метод: потенцирование и использование монотонности логарифмической функции.

$$\Leftrightarrow \lg\big(2\cdot(4^{x-2}+9)\big)<\lg\big(10\cdot(2^{x-2}+1)\big)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot(4^{x-2}+9)<10\cdot(2^{x-2}+1)\Leftrightarrow$$

Замечание. При основании логарифмов больше единицы логарифмическая функция монотонно возрастает, поэтому при потенцировании простейшего логарифмического неравенства знак неравенства не изменяется.

$$\Leftrightarrow 4^{x-2}+9<5\cdot(2^{x-2}+1)\Leftrightarrow 4^{x-2}-5\cdot 2^{x-2}+9-5<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{x-2}-5\cdot 2^{x-2}+4<0\Leftrightarrow$$

Замечание (анализ области определения тождеств). Используя тождество, мы обязаны сразу же записать область существования этого тождества. Однако в данном случае, в силу того, что показательная функция положительна при любом значении аргумента, это дополнительное условие выполняется всегда и его можно «отбросить».

Тип: основания степеней - степени одного числа.

Метод: приведение к одинаковым основаниям степеней.

$$\Leftrightarrow 4^{x-2} - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 < 0 \Leftrightarrow (2^2)^{x-2} - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 < 0 \Leftrightarrow$$

Используем тождество степень степени:

$$(2^2)^{x-2} = 2^{2(x-2)}.$$

$$\Leftrightarrow (2^2)^{x-2} - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 < 0 \Leftrightarrow 2^{2(x-2)} - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 < 0 \Leftrightarrow$$

Тип: одинаковые основания - одинаковые показатели степеней.

Метод: замена переменной.

Делаем замену переменной:

$$y = 2^{x-2}.$$

$$\Leftrightarrow 2^{2(x-2)} - 5 \cdot 2^{x-2} + 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-2} > 0, \\ y^2 - 5y + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Тип: квадратное неравенство.

Метод: графическое решение квадратного неравенства.

Корни квадратного трехчлена (рис. 11):

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5}{2} \pm \sqrt{(\frac{5}{2})^2 - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} = \left[\begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix}\right..$$

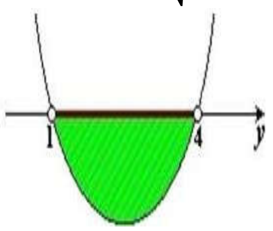

Рис. 11

$$y^2 - 5y + 4 < 0 \Leftrightarrow y \in (1; 4)$$

Решив квадратное неравенство относительно новой переменной, делаем обратную замену:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-2} > 0, \\ y \in (1; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-2} > 1, \\ 2^{x-2} < 4 \end{cases}$$

Приводим к одинаковым основаниям степеней:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-2} > 1, \\ 2^{x-2} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-2} > 2^0, \\ 2^{x-2} < 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Тип: простейшие показательные неравенства с одинаковыми основаниями.

Метод: логарифмирование и использование монотонности показательной функции.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-2} > 2^0, \\ 2^{x-2} < 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < 4. \end{cases}$$

Замечание. При основании логарифмов больше единицы показательная функция монотонно возрастает, поэтому при логарифмировании простейшего показательного неравенства знак неравенства не изменяется. Логарифмируем сразу двойное неравенство.

Ответ: $x \in (2; 4)$.

Задания для самостоятельного решения

1. $\log_2(4^x - 5 \cdot 2^x + 8) > 0$;
2. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$;
3. $\lg(3^x + x - 17) < x\lg 30 - x$;
4. $\log_4(2 \cdot 4^{x-2} - 1) \geq 2x - 4$;
5. $\log_3(3^x + 1) + x > 2 + \log_3 10$;
6. $\log_2(25^{x+3} - 1) > 2 + \log_2(5^{x+3} + 1)$;
7. $\log_4(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{4}} \frac{3^x - 1}{16} \leq \frac{3}{4}$;
8. $\lg(3 \cdot 5^x + 24 \cdot 20^x) > x + \lg 18$;
9. $\frac{\log_3(3^{2x+1} - 16 \cdot 3^x + 16)}{x+1} \leq 1$;
10. $\log_2(4^x + 4) < \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3)$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Методические указания к лекциям

Обучение студентов осуществляется по традиционной технологии (лекции, практики) с включением инновационных элементов.

С точки зрения используемых методов лекции подразделяются следующим образом: информационно-объяснительная лекция, повествовательная, лекция-беседа, проблемная лекция и т. д.

Устное изложение учебного материала на лекции должно конспектироваться. Слушать лекцию нужно уметь – поддерживать своё внимание, понять и запомнить услышанное, уловить паузы. В процессе изложения преподавателем лекции студент должен выяснить все непонятные вопросы. Записывать содержание лекции нужно обязательно – записи помогают поддерживать внимание, способствуют пониманию и запоминанию услышанного, приводит знание в систему, служат опорой для перехода к более глубокому самостоятельному изучению предмета.

Методические рекомендации по конспектированию лекций:

– запись должна быть системной, представлять собой сокращённый вариант лекции преподавателя. Необходимо слушать, обдумывать и записывать одновременно;

– запись ведётся очень быстро, чётко, по возможности короткими выражениями;

– не прекращая слушать преподавателя, нужно записывать то, что необходимо усвоить. Нельзя записывать сразу же высказанную мысль

преподавателя, следует её понять и после этого кратко записать своими словами или словами преподавателя. Важно, чтобы в ней не был потерян основной смысл сказанного;
–имена, даты, названия, выводы, определения записываются точно;
–следует обратить внимание на оформление записи лекции. Для каждого предмета заводится общая тетрадь. Отличным от остального цвета следует выделять отдельные мысли и заголовки, сокращать отдельные слова и предложения, использовать условные знаки, буквы латинского и греческого алфавитов, а также некоторые приёмы стенографического сокращения слов.

Методические указания к практическим занятиям

Основной частью самостоятельной работы студента является его систематическая подготовка к практическим занятиям. Студенты должны быть нацелены на важность качественной подготовки к таким занятиям. При подготовке к практическим занятиям студенты должны освоить вначале теоретический материал по новой теме занятия, с тем чтобы использовать эти знания при решении задач. Затем просмотреть объяснения решения примеров, задач, сделанные преподавателем на предыдущем практическом занятии, разобраться с примерами, приведенными лектором по этой же теме. Решить заданные примеры. Если некоторые задания вызвали затруднения при решении, попросить объяснить преподавателя на очередном практическом занятии или консультации.

Для работы на практических занятиях, самостоятельной работы во внеаудиторное время, а также для подготовки к экзамену рекомендуется использовать методические рекомендации к практическим занятиям. Предлагаемые методические рекомендации адресованы студентам, обучающимся как по рейтинговой, так и по традиционной системе контроля качества знаний.

Данные методические рекомендации содержат учебно-методический материал для проведения практических занятий.

Для получения практического опыта решения задач по дисциплине на практических занятиях и для работы во внеаудиторное время предлагается самостоятельная работа в форме практических работ. Контроль над выполнением и оценка практических работ осуществляется в форме собеседования.

Методические указания к самостоятельной работе

При изучении дисциплины студенты часть материала должны проработать самостоятельно. Роль самостоятельной работы велика.

Планирование самостоятельной работы студентов по дисциплине необходимо проводить в соответствии с уровнем подготовки студентов к изучаемой дисциплине. Самостоятельная работа студентов распадается на два самостоятельных направления: на изучение и освоение теоретического лекционного материала, и на освоение методики решения практических задач.

При всех формах самостоятельной работы студент может получить разъяснения по непонятным вопросам у преподавателя на индивидуальных консультациях в соответствии с графиком консультаций. Студент может также обратиться к рекомендуемым преподавателем учебникам и учебным пособиям, в которых теоретические вопросы изложены более широко и подробно, чем на лекциях и с достаточным обоснованием.

Консультация – активная форма учебной деятельности в педвузе. Консультацию предваряет самостоятельное изучение студентом литературы по определенной теме. Качество консультации зависит от степени подготовки студентов и остроты поставленных перед преподавателем вопросов.

Ряд тем и вопросов курса отведены для самостоятельной проработки студентами. При этом у лектора появляется возможность расширить круг изучаемых проблем, дать на самостоятельную проработку новые интересные вопросы. Студент должен разобраться в рекомендуемой литературе и письменно изложить кратко и доступно для себя основное содержание материала. Преподаватель проверяет качество усвоения самостоятельно проработанных вопросов на практических занятиях, контрольных работах, коллоквиумах и во время экзамена. Затем корректирует изложение материала и нагрузку на студентов.

При подготовке к практическим работам и тестированию необходимо повторить материал, рассмотренный на практических занятиях, прорешать соответствующие задачи или примеры, убедиться в знании необходимых формул, определений и т. д.

При подготовке к устному опросу студентам необходимо изучить указанные преподавателем темы, используя конспекты лекций, рекомендуемую литературу, учебные пособия. Ответы на возникающие вопросы в ходе подготовки можно получить на очередной консультации.

Таким образом, использование всех рекомендуемых видов самостоятельной работы дает возможность значительно активизировать работу студентов над материалом курса и повысить уровень их усвоения.

В освоении дисциплины инвалидами и лицами с ограниченными возможностями здоровья большое значение имеет индивидуальная учебная работа (консультации) – дополнительное разъяснение учебного материала.

Индивидуальные консультации по предмету являются важным фактором, способствующим индивидуализации обучения и установлению воспитательного контакта между преподавателем и обучающимся инвалидом или лицом с ограниченными возможностями здоровья.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основная литература

1. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс] : учеб. Пособие. Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2015. — 541 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/66312.

2. Математика. Сборник задач по углубленному курсу [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.А. Будак [и др.]. — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2015. — 329 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/66321 .

Дополнительная литература

1. Шабунин, М.И. Математика : пособие для поступающих в вузы [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2016. — 747 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/84086 .

2. Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия) [Электронный ресурс] / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом.— Москва : Физматлит, 2015. — 312 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/72013 .

3. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] : учеб-метод. пособие / Н.Д. Золотарёва [и др.]. — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2017. — 549 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/97419 .

4. Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия) [Электронный ресурс] / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. – Москва : Физматлит, 2015. — 312 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/72013 .

5. Шклярский, Д.О. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия) [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Д.О. Шклярский, Н.Н. Ченцов, И.М. Яглом. — Москва : Физматлит, 2015. — 256 с. — URL: https://e.lanbook.com/book/72005 .

Периодические издания

1. Вестник Московского Университета. Серия 1. Математика и информатика. Механика. - URL: https://dlib.eastview.com/browse/publication/9045/udb/890

2. Квант : [полнотекстовый архив номеров за период: 1970-2010 гг.]. - URL: http://www.kvant.info/old.htm.

3. Математика в высшем образовании. - URL: https://e.lanbook.com/journal/2368#journal_name

4. Математический форум (Итоги науки. Юг России). Южный математический институт Владикавказского научного центра Российской академии наук и Правительства Республики Северная Осетия-Алания (Владикавказ). – URL: https://elibrary.ru/contents.asp?titleid=32642

5. Математическое образование / Фонд математического образования и просвещения (Москва). – URL: https://elibrary.ru/contents.asp?id=34529652

6. Современная математика и концепции инновационного математического образования . – URL: http://elibrary.ru/contents.asp?titleid=53797.

Интернет-ресурсы

1. ЭБС «Университетская библиотека ONLINE» [учебные, научные здания, первоисточники, художественные произведения различных издательств; журналы; мультимедийная коллекция: аудиокниги, аудиофайлы, видеокурсы, интерактивные курсы, экспресс-подготовка к экзаменам, презентации, тесты, карты, онлайн-энциклопедии, словари] : сайт. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red.

2. ЭБС издательства «Лань» [учебные, научные издания, первоисточники, художественные произведения различных издательств; журналы] : сайт. – URL: http://e.lanbook.com.

3. ЭБС «Юрайт» [раздел «ВАША ПОДПИСКА: Филиал КубГУ (г. Славянск-на-Кубани): учебники и учебные пособия издательства «Юрайт»] : сайт. – URL: https://www.biblio-online.ru/catalog/E121B99F-E5ED-430E-A737-37D3A9E6DBFB.

4. Научная электронная библиотека. Монографии, изданные в издательстве Российской Академии Естествознания [полнотекстовый ресурс свободного доступа] : сайт. – URL: https://www.monographies.ru/.

5. Научная электронная библиотека статей и публикаций «eLibrary.ru» : российский информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины, образования [5600 журналов, в открытом доступе – 4800] : сайт. – URL: http://elibrary.ru.

6. КиберЛенинка : научная электронная библиотека [научные журналы в полнотекстовом формате свободного доступа] : сайт. – URL: http://cyberleninka.ru.

7. Единое окно доступа к образовательным ресурсам : федеральная информационная система свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для всех уровней образования: дошкольное, общее, среднее профессиональное, высшее, дополнительное : сайт. – URL: http://window.edu.ru.

8. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов [для общего, среднего профессионального, дополнительного образования; полнотекстовый ресурс свободного доступа] : сайт. – URL: http://fcior.edu.ru.

9. Энциклопедиум [Энциклопедии. Словари. Справочники : полнотекстовый ресурс свободного доступа] // ЭБС «Университетская библиотека ONLINE» : сайт. – URL: http://enc.biblioclub.ru/.

10. Электронный каталог Кубанского государственного университета и филиалов. – URL: http://212.192.134.46/MegaPro/Web/Home/About.

Учебное издание

Радченко Светлана Александровна

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Раздел «Логарифмические неравенства»

Методические материалы
к изучению раздела дисциплины и организации самостоятельной работы
студентов 5-го курса,
обучающихся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование
(профили подготовки – Математика, Информатика)
очной формы обучения

Подписано в печать 13.07.2018.
Формат 60х84/16. Бумага типографская. Гарнитура «Таймс»
Печ. л. 1,81. Уч.-изд. л. 1,09
Тираж 1 экз. Заказ № 126

Филиал Кубанского государственного университета
в г. Славянске-на-Кубани
353560, Краснодарский край, г. Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200

Отпечатано в издательском центре
филиала Кубанского государственного университета в г. Славянске-на-Кубани
353560, Краснодарский край, г. Славянск-на-Кубани, ул. Кубанская, 200